

II PRODUKSI DENGAN SATU INPUT VARIABEL

Deskripsi Materi Kuliah:

Bab ini memperkenalkan konsep fungsi produksi dan penerapan konsep tersebut sebagai dasar bagi pengembangan model hubungan produksi input-output. Fungsi produksi pertanian dalam bab ini akan dijelaskan dengan menggunakan pendekatan grafis dan tabulasi. Selain itu diberikan contoh-contoh matematis dari fungsi produksi sederhana dengan satu input variabel dan satu output. Konsep produk marginal dan produk rata-rata fisik juga mulai dibahas. Penggunaan derivasi pertama, kedua dan ketiga untuk menurunkan produk total, produk rata-rata dan produk marginal diilustrasikan secara bertahap bersamaan dengan konsep elastisitas produksi.

Tujuan Pembelajaran:

Kompetensi dasar yang harus dikuasai mahasiswa setelah mengikuti satu kali tatap muka di kelas selama 2X50 menit, membaca *hand out* dan melakukan kajian pustaka selama 2X60 menit dan mengerjakan tugas terstruktur mandiri selama 2X60 menit adalah menjelaskan kembali kata kunci dan definisi serta memahami konsep-konsep sebagai berikut:

1. Fungsi produksi
2. Domain
3. Fungsi produksi kontinyu
4. Fungsi produksi diskrit
5. Input tetap
6. Input variabel
7. *Short run*
8. *Long run*
9. *Intermediate run*
10. *Sunk cost*
11. *Law of diminishing (marginal) returns*
12. *Total physical product (TPP)* atau produk total fisik
13. *Marginal physical product (MPP)* atau produk marginal fisik
14. *Average physical product (APP)* atau produk rata-rata fisik
15. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
16. *Sign*
17. *Slope*
18. *Curvature*
19. Derivasi pertama, kedua dan ketiga
20. Elastisitas produksi

2.1. Konsep Fungsi Produksi

Fungsi produksi menjelaskan hubungan teknis yang mentransformasikan input (sumberdaya) menjadi output (komoditi). Pakar matematika mendefinisikan suatu fungsi sebagai aturan untuk menetapkan setiap nilai dalam sebuah himpunan variabel (domain) fungsi dengan satu nilai tunggal himpunan variabel lain yang menjadi range fungsi tersebut. Umumnya fungsi dituliskan secara matematis sebagai berikut:

$$y=f(x) \dots\dots\dots(2.1.)$$

Di mana y adalah output dan x adalah input. Domain fungsi adalah seluruh nilai x yang lebih besar atau sama dengan nol. Range fungsi terdiri dari level output (y) yang diperoleh dari pemakaian setiap level input (x). Persamaan (2.1.) adalah bentuk yang paling umum fungsi produksi. Dari bentuk umum ini tidak dimungkinkan untuk menetapkan secara tepat seberapa banyak output (y) dapat diperoleh dari level input (x) tertentu. Dalam hal ini diperlukan bentuk fungsi f(x) yang lebih spesifik. Misalnya:

$$y= 2x \dots\dots\dots(2.2.)$$

Untuk setiap nilai x dapat ditetapkan nilai tunggal y yang unik. Sebagai contoh bila x=2 maka nilai y=4, jika x=6 maka nilai y=12. Domain dari fungsi tersebut mencakup seluruh nilai yang mungkin untuk x dan range fungsi adalah himpunan nilai y yang sesuai dengan nilai x. Dalam persamaan (2.2.) setiap unit input (x) memproduksi 2 unit output (y).

Misal fungsi : $y=\sqrt{x} \dots\dots\dots(2.3.)$

adalah tidak mungkin untuk menetapkan nilai negatif akar pangkat dua untuk memperoleh angka riil. Oleh karena itu domain (x) dan range (y) dari persamaan (2.3.) mencakup hanya nilai-nilai yang lebih besar atau sama dengan nol. Dalam hal ini sekali lagi fungsi dapat memenuhi definisi dasar yang menyatakan bahwa nilai tunggal range dipasangkan pada setiap nilai domain fungsi. Batasan ini berlaku untuk seluruh fungsi produksi, dan dengan alasan inilah kuantitas input negatif tidak dimungkinkan dalam fungsi produksi pertanian.

Fungsi-fungsi produksi dapat dinyatakan dengan banyak cara, di antaranya:

- Jika x = 10 maka y = 25
- Jika x = 20 maka y = 50
- Jika x = 30 maka y = 60
- Jika x = 40 maka y = 65
- Jika x = 50 maka y = 60

Perhatikan bahwa satu nilai y dipasangkan dengan setiap nilai x. Dari data hipotetik di atas dapat dicermati ada dua nilai x (yaitu 30 dan 50) yang memiliki nilai y yang sama yaitu 60. Definisi matematis tentang fungsi memungkinkan hal ini, akan tetapi y hanya dapat dipasangkan dengan satu nilai x tunggal yang spesifik. Dengan kata lain tidak menjadi masalah bila ada lebih dari satu nilai x dipasangkan dengan nilai y yang sama.

Sebaliknya data hipotetik berikut ini memberikan ilustrasi relasi bukan fungsi:

- Jika x = 25 maka y = 10
- Jika x = 50 maka y = 20
- Jika x = 60 maka y = 30
- Jika x = 65 maka y = 40
- Jika x = 60 maka y = 50

Data hipotetik tersebut tidak memenuhi definisi fungsi secara matematis. Perhatikan bahwa nilai $x=60$ memiliki dua pasangan nilai y yaitu 30 dan 50. Jadi relasi antara nilai x dan y pada data hipotetik di atas bukan fungsi.

Setelah deferensiasi konseptual antara relasi fungsional dan relasi bukan fungsi dipahami, konsep ini dapat diterapkan untuk menjelaskan hubungan produksi input output. Budidaya komoditas jagung dipilih sebagai contoh. Fungsi produksi jagung menggambarkan hubungan antara penggunaan pupuk N dan produksi total per satuan luas lahan. Data hipotetik yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1. Respon Produksi Jagung terhadap Pemakaian Pupuk Nitrogen

Jumlah Pupuk N (lb/acre)	Produksi Jagung (bu/acre)
0	50
40	75
80	105
120	115
160	123
200	128
240	124
<p><i>Keterangan:</i> 1 lb=1 pound= 0,453592 kg 1 hektar (ha) = 2,471 acre 1 bu (=US bushel) =35,239 liter</p>	

Dari tabel 2.1. diketahui bahwa penggunaan 160 lb pupuk N per acre dapat menghasilkan produksi jagung sebanyak 123 bu/acre. Hubungan fungsional semacam ini merupakan realitas dalam ekonomi produksi pertanian. Namun respon produksi input-output sebagaimana diilustrasikan tabel 2.1. akan mengalami masalah, misalnya bila aplikasi pupuk N yang diberikan adalah 140 lb/acre. Bagaimana dapat diketahui berapa produksi jagung yang dapat diperoleh pada level pemakaian pupuk sebanyak itu? Dalam kasus ini, para pakar matematika ekonomi memberikan solusi dengan mengubah pendekatan tabulasi menjadi pendekatan matematis. Fungsi produksi $y=f(x)$ yang dalam data hipotetik bersifat diskontinyu atau diskrit, diubah menjadi data yang kontinyu. Dengan cara ini dapat diperoleh informasi hubungan input output pada setiap level pemakaian input pupuk N.

Selain itu fungsi produksi $y=f(x)$ harus dispesifikasikan lagi sebab bila dicermati lebih detail, dari data produksi jagung diketahui bahwa penambahan kuantitas produksi untuk setiap penambahan 40 lb pupuk N per acre tidaklah sama. Mula-mula produk jagung bertambah 25 unit dari 50bu/acre menjadi 75 bu/acre. Dengan penambahan pupuk N sebanyak 40 lb dari 40 menjadi 80 lb, produksi meningkat dari 75 menjadi 105 bu/acre, atau bertambah sebanyak 30 unit. Pada tahap produksi berikutnya, bila pemakaian pupuk N ditambah dengan jumlah unit yang sama yaitu 40 lb/acre, peningkatan jumlah produksi menunjukkan penurunan, yaitu dari 105 menjadi 115 bu/acre. Artinya peningkatan jumlah produksi semakin menurun, yaitu hanya sebesar 15 unit.

Spesifikasi fungsi produksi yang lebih detail dapat diformulasikan secara statistik dengan memasukkan sebanyak mungkin data pengamatan di lapang. Misal hubungan input pupuk N dan output jagung diformulasikan sebagai berikut:

$$y=0,75x+0,0042x^2-0,000023x^3 \dots\dots\dots(2.4.)$$

di mana: y= produk fisik total jagung dalam satuan bu/acre dan x adalah jumlah pupuk N yang diaplikasikan dalam satuan lb/acre.

Persamaan 2.4. memiliki sejumlah keunggulan dibandingkan pendekatan tabulatif 2.1. Salah satu keunggulan utamanya adalah persamaan 2.4. memungkinkan dilakukannya penghitungan output pada setiap level pemakaian input. Contohnya, jika pupuk N yang digunakan adalah 200lb/acre, maka jagung yang dapat dihasilkan adalah $0,75(200)+0,0042(200^2)-0,000023(200^3)= 134$ bu/acre. Fungsi produksi semacam persamaan 2.4. merupakan fungsi kontinu. Kelebihan lain fungsi ini adalah dapat menghitung tambahan output (output marginal) yang diperoleh dari penambahan pemakaian input dengan jumlah tertentu sebagaimana diilustrasikan pada tabel 2.2.

Tabel 2.2. Jumlah Output Jagung pada Berbagai Alternatif Tingkat Pemakaian Pupuk N untuk Fungsi Produksi $y=0,75x+0,0042x^2-0,000023x^3$

Jumlah Pupuk N (lb/acre)	Produksi Jagung (bu/acre)
0	0,0
20	16,496
40	35,248
60	55,152
80	75,104
100	94,000
120	110,736
140	124,208
160	133,312
180	136,944
200	134,000
220	123,376
240	103,968

Keterangan:
 1 lb=1 pound= 0,453592 kg
 1 hektar (ha) = 2,471 acre
 1 bu (=US bushel) =35,239 liter

Hasil yang diperoleh berbeda antara tabel 2.1. dan 2.2.. Pada tabel 2.1. dinyatakan bahwa bila petani tidak menggunakan pupuk N maka hasil panen yang diperoleh adalah 50 bu/acre, sementara pada tabel 2.2. tanpa aplikasi pupuk N, petani tidak memperoleh hasil panen. Secara matematis, perhitungan pada tabel 2.2. benar, namun kenyataan di lapang dapat saja membenarkan data pada tabel 2.1. dengan asumsi petani mengaplikasikan pupuk N pada periode tanam sebelumnya. Melalui proses penguraian kimia, tanah yang diolah sebenarnya masih memiliki kandungan Nitrogen yang cukup untuk tanaman, sehingga masih dapat berproduksi walau tidak optimal. Realitas ini dapat dimasukkan ke dalam persamaan 2.4. dengan menyertakan konstanta sebesar 50, namun tentu saja nilai koefisien persamaan untuk x akan turut berubah. Pada banyak kasus produksi pertanian berlaku *no input produces no output*, tak ada hasil panen tanpa korbanan, tidak ada output tanpa input produksi.

2.2. Input Tetap, Input Variabel dan Periodisasi Produksi

Sejauh ini telah dibahas produksi pertanian dengan satu output dan satu input. Secara umum bentuk fungsi matematis yang telah dipelajari adalah

$$y=f(x).....(2.5.)$$

Di mana y=output dan x = input

Persamaan 2.5. merupakan bentuk fungsi produksi yang paling sederhana. Fungsi ini mengasumsikan proses produksi dapat secara akurat dijelaskan oleh fungsi di mana hanya satu jenis input digunakan untuk memproduksi output tertentu. Namun hampir tak ada satupun komoditas pertanian yang dapat diproduksi hanya dengan menggunakan satu jenis input produksi. Oleh karena itu fungsi 2.5. belum dapat menggambarkan realitas produksi pertanian sesungguhnya. Fungsi produksi alternatif yang lebih mendekati realitas proses produksi diformulasikan sebagai berikut:

$$y=f(x_1| x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7).....(2.5.)$$

di mana y= produksi jagung (bu/acre), x₁= input pupuk N (lb/acre), x₂,x₃,x₄,x₅,x₆,x₇= input-input lain misalnya lahan, tenaga kerja, alat mesin pertanian, dsb yang dalam persamaan 2.5. diasumsikan tidak berubah selama periode analisis.

Dalam persamaan 2.5. x₁ diperlakukan sebagai input variabel, sementara x₂,x₃,x₄,x₅,x₆,x₇ konstan. Notasi ' | ' menunjukkan bahwa input produksi yang disebutkan sesudah notasi tersebut adalah input tetap. Pertanyaan yang mungkin muncul selanjutnya adalah bagaimana input produksi dikategorikan menjadi input tetap dan input variabel? Input variabel adalah input produksi yang level pemakaiannya dapat dikontrol oleh petani sebagai pengelola usahatani.Hal ini mengimplikasikan bahwa petani memiliki cukup waktu untuk melakukan penyesuaian jumlah input variabel yang digunakan.

Input tetap di sisi lain, didefinisikan sebagai input produksi yang level pemakaiannya tidak sepenuhnya dapat dikontrol oleh petani. Dalam proses produksi pertanian lahan seringkali dikategorikan sebagai input tetap, sebab dengan sejumlah alasan petani tidak mampu menambah luas lahan pertanian yang dimilikinya dalam waktu singkat.

Kategorisasi input tetap dan input variabel terkait erat dengan konsep waktu. Pakar ekonomi lazimnya menggunakan istilah *long run* untuk mendefinisikan periode waktu yang cukup panjang agar seluruh input produksi (termasuk input tetap) dapat diperlakukan sebagai input variabel. *Short run* didefinisikan sebagai periode waktu yang cukup pendek sehingga seluruh input produksi merupakan input tetap. Periodisasi produksi pertanian lain adalah *intermediate run* yang menunjukkan periode waktu yang cukup lama sehingga beberapa input produksi dapat dikategorikan sebagai input variabel namun masih tergolong singkat sehingga beberapa input produksi yang nilai ekonomisnya tinggi (seperti lahan dan alat mesin pertanian) masih diperlakukan sebagai input tetap.

Konsep penting yang perlu diingat berkenaan dengan konsep periodisasi proses produksi adalah bahwa kategori *short run*, *long run* dan *intermediate run* tidak secara khusus menunjuk pada kisaran waktu jam, hari, minggu, bulan atau tahun namun lebih pada kemampuan manajerial dan finansial untuk mengubah input produksi tetap menjadi input variabel. Dalam kasus produksi pertanian, petani mungkin mampu mengubah input tetap alat mesin pertanian menjadi input variabel dalam kurun waktu 6 bulan, namun membutuhkan waktu lebih lama untuk mengubah input tetap lahan pertanian menjadi input variabel. Beberapa jenis input tetap lain seperti tenaga kerja keluarga relatif lebih mudah dan murah untuk bergeser menjadi input variabel. Pengalaman produksi pertanian di berbagai daerah menunjukkan bahwa pada musim tanam petani melibatkan lebih banyak buruh tani yang diupah untuk mengerjakan aktivitas tertentu. Sudut pandang ini mengimplikasikan kategorisasi input produksi menjadi input tetap dan input variabel bukanlah konsep yang dikotomis melainkan konsep *continuum*. Dalam konteks ini perlu diingat, sekali input produksi digunakan, biaya yang dialokasikan untuk pembelian input merupakan *sunk cost*, sebab umumnya input produksi pertanian tidak dapat dijual kembali, atau digunakan pada jenis usahatani lain.

2.3. The Law of Diminishing Returns

Penamaan *law of diminishing returns* atau hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang, sesungguhnya telah salah kaprah. Berdasarkan konsep yang direpresentasikan penamaan yang benar adalah *the law of diminishing marginal returns*. Hukum ini menyatakan sejalan dengan penambahan satu unit input variabel, setelah titik tertentu, tambahan output produksi akan semakin menurun. Adakalanya hukum ini dinamai *the law of variable proportions*. Kata kunci dalam hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang adalah tambahan, *additional*, dan *marginal*.

Dalam hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang tidak berarti penambahan input variabel yang dilakukan akan berakibat pada berkurangnya produk total. Produksi total tetap bertambah sejalan penambahan input produksi namun besarnya penambahan produksi ini akan semakin menurun. Berdasarkan pendekatan grafis, hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang dapat direpresentasikan sebagai laju perubahan slope fungsi produksi (*the rate of change in the slope of the production function*). Derajat atau laju perubahan slope fungsi produksi ini merupakan *curvature* atau lengkung fungsi produksi.

Pada gambar 2.1. diilustrasikan tiga tahapan fungsi produksi. Fungsi produksi A tidak memiliki lengkung sama sekali. Oleh karena itu fungsi produksi A tidak memenuhi hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang. Setiap unit penambahan input variabel yang dilakukan oleh petani menghasilkan tambahan output yang sama besar. Contoh fungsi semacam ini adalah:

$$y=2x.....(2.7.)$$

Atau dengan bentuk fungsi yang lebih umum sebagai berikut:

$$y=bx.....(2.8.)$$

di mana bila b bernilai positif fungsi produksi menunjukkan *constant marginal returns*.

Fungsi produksi B dalam gambar 2.1. merupakan jenis fungsi produksi yang lain, di mana tambahan satu unit input produksi variabel memberikan tambahan output yang lebih besar secara proporsional. Fungsi inipun tidak memenuhi hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang. Contoh matematis fungsi semacam ini adalah:

$$y=x^2.....(2.9.)$$

atau dalam bentuk fungsi yang lebih umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y=ax^b.....(2.10.)$$

di mana a dan b adalah angka positif dan b lebih besar dari satu. Jika b=1 maka fungsi akan sama dengan gambar A. Gambar b menunjukkan fungsi dengan ciri *increasing marginal returns*.

Fungsi C pada gambar 2.1. menunjukkan hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang. Pada gambar tersebut tambahan satu unit input variabel menghasilkan tambahan produk total dengan pertambahan yang semakin berkurang. Contoh fungsi matematisnya adalah:

$$y=\sqrt{x}.....(2.11.)$$

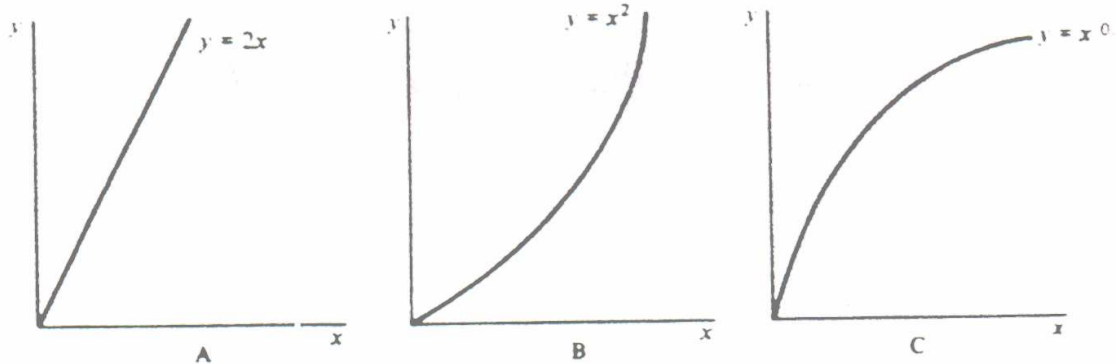
Cara lain untuk menuliskan persamaan 2.11. adalah:

$$y=x^{0,5}.....(2.12.)$$

atau:

$$y=ax^b.....(2.13.)$$

di mana a dan b adalah angka positif dan b lebih kecil dari satu namun lebih besar dari nol. Fungsi tersebut akan semakin meningkat tetapi dengan laju peningkatan yang semakin menurun



Gambar 2.1. Ragam Fungsi Produksi (Debertin,D.L.,1986)

2.4. Produk Marginal dan Produk Rerata

Produk marginal fisik atau *marginal physical product (MPP)* adalah perubahan output yang disebabkan oleh perubahan penambahan penggunaan input produksi. Umumnya penambahan pemakaian input dilakukan secara bertahap sebesar 1 unit. MPP input x_1 dapat dinotasikan sebagai MPP_{x_1} .

Produk rerata (*average physical product, APP*) didefinisikan sebagai rasio output terhadap input. Secara matematis $APP = y/x$. Pada sembarang tingkat penggunaan input x APP menunjukkan rerata output per unit input x yang digunakan.

Untuk fungsi produksi $y=f(x)$(2.14.)

MPP diformulasikan sebagai $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ di mana Δ merupakan notasi perubahan. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dapat dibaca: perubahan y yang disebabkan oleh perubahan x .

Sedangkan APP secara matematis dapat dituliskan sebagai y/x atau $f(x)/x$

Berikut contoh aplikasi matematis fungsi produksi. Misal fungsi produksi $y=2x$(2.15.) MPP fungsi tersebut adalah turunan pertama fungsi yaitu sama dengan 2. Perubahan y yang disebabkan oleh perubahan penggunaan 1 unit input x sama dengan 2. TPP untuk fungsi 2.15. adalah $2x/x=2$. Jadi untuk fungsi produksi 2.15. $MPP=APP=2$.

Untuk fungsi produksi $y=bx$(2.16.) MPP adalah konstanta b . Setiap penambahan satu unit x akan menyebabkan bertambahnya output sebesar b unit. Karena $APP=y/x=bx/x=b$, maka $MPP = APP$.

Konsep MPP dan APP juga dapat dijelaskan dengan contoh data hipotetik pada tabel 2.3. sebagai berikut:

Tabel 2.3. MPP dan APP untuk Respon Jagung terhadap Pupuk Nitrogen

Jumlah pupuk N (lb/acre)	Δx	Jumlah jagung (bu/acre)	Δy	MPP	APP
0	40	50			50/0=.....
40	40	75	25	25/40=0,625	75/40=1,875
80	40	105	30	30/40=0,750	105/80=1,313
120	40	115	10	10/40=0,250	115/120=0,958
160	40	123	8	8/40=0,200	123/160=0,769
200	40	128	5	5/40=0,125	128/200=0,640
240	40	124	-4	-4/40= -0,10	124/240=0,517

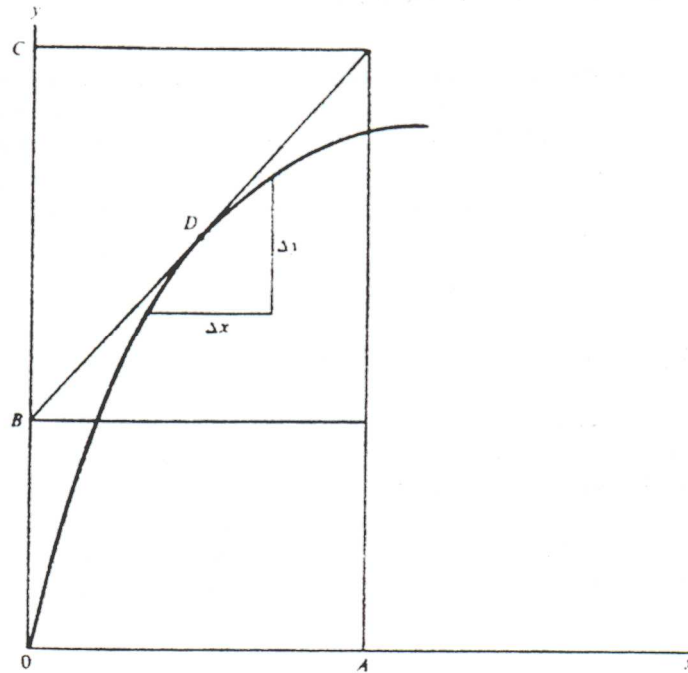
Tabel 2.3. juga menyertakan perhitungan rerata produk fisik, di mana rerata produk fisik (*APP=Average Physical Product*) adalah rasio output terhadap input atau dapat dinyatakan sebagai berikut: $APP=y/x$. Pada setiap level penggunaan input x APP merepresentasikan nilai rerata output per unit input.

2.5. MPP dan Fungsi Produk Marginal

Prosedur yang lebih mudah untuk menghitung MPP dapat dilakukan secara matematis dengan menurunkan fungsi produksi. Produk Marginal Fisik (*MPP=Marginal Physical Product*) adalah slope atau *rate of change* (laju perubahan) fungsi produksi. Fungsi produksi tidak lain adalah Produk Total Fisik (*TPP=Total Physical Product*). Jika slope fungsi TPP digambarkan, hasilnya adalah fungsi MPP. Misal fungsi TPP $y=2x.....(2.17.)$. Peningkatan penambahan y yang disebabkan oleh peningkatan penggunaan satu unit input y adalah sebesar 2 unit. Dengan kata lain $MPP=\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$. Pada contoh fungsi 2.17. fungsi MPP konstan sebesar 2 unit.

Untuk fungsi yang tidak memiliki slope konstan, MPP hanya dapat diperkirakan berdasarkan besarnya slope fungsi produksi pada titik tertentu (lihat gambar 2.2.). Pendugaan atau aproksimasi semacam ini akan semakin mendekati kebenaran bila nilai Δx kecil atau mendekati tetapi tidak sama dengan nol. Salah satu cara untuk menetapkan slope fungsi produksi pada sembarang titik adalah dengan menggambarkan tangen fungsi produksi pada titik yang bersangkutan. Pada gambar 2.2. titik tersebut adalah titik D yang memotong aksis vertikal pada titik B. MPP pada titik D sama dengan slope garis tersebut atau dapat dituliskan sebagai BC/OA . Tentu saja pendekatan grafis semacam ini membutuhkan cukup banyak waktu. Cara yang lebih efisien dapat ditempuh dengan cara menurunkan fungsi produksi. Turunan pertama fungsi produksi dalam hal ini sama dengan

fungsi limit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mendekati nol. Semakin kecil nilai Δx akan semakin teliti nilai MPP yang diperoleh. Oleh karena itu turunan pertama fungsi produksi, dy/dx adalah nilai slope fungsi produksi pada titik tertentu. Pada gambar 2.2. pada titik D, $dy/dx=BC/OA$.



Gambar 2.2. Kurva Produk Marginal Fisik (*Marginal Physical Product*)

Untuk fungsi produksi $y=f(x)$(2.18.). Turunan pertama atau slope fungsi produksi dinyatakan sebagai $dy/dx=f'(x)$ atau f_1(2.19.) atau dapat juga dituliskan sebagai berikut: $dy/dx=f' x= f_1=dTPP/dx=MPP$ (2.20.).

Contoh:

Fungsi TPP $y=2x$(2.21.)

$dy/dx=dTPP/dx=MPP=2$(2.22.)

Setiap tambahan satu unit x akan memberikan tambahan produk total sebesar 2 unit. Untuk seluruh domain fungsi produksi nilai slope fungsi produksi konstan sebesar 2. Secara matematis dituliskan [$f'(x)$ atau f_1] adalah 2 untuk setiap nilai x .

Pada fungsi ini $\frac{\Delta y}{\Delta x} = dy/dx$.

Bentuk fungsi yang lebih umum dapat dituliskan sebagai berikut: $y=bx$(2.25.) di mana b bernilai positif. b adalah MPP x . Derivasi fungsi produksi $dy/dx=b$. Artinya setiap penambahan 1 unit x akan memberikan tambahan produk total sebesar b unit. Jika nilai b

negatif maka TPP akan menurun, namun agaknya hal ini tidak logis dalam praktek produksi usahatani.

Contoh bentuk fungsi produksi yang lain adalah persamaan (2.24.) sebagai berikut:

$$y=50+5,93x^{0,5} \dots\dots\dots(2.24.)$$

MPP x fungsi ini tidak sama untuk setiap nilai x. Untuk menghitung MPP pada nilai x tertentu, tidak cukup hanya dengan menurunkan fungsi produksi, tetapi nilai x juga harus diketahui. Ada dua aturan yang dapat digunakan untuk menurunkan fungsi MPP:

1. Turunan dari nilai konstan dalam suatu fungsi sama dengan nol. Untuk fungsi (2.24.) turunan 50 adalah nol. Nilai konstan sebesar 50 pada persamaan tersebut adalah intersep yang dapat diartikan berapapun level penggunaan input nilai y (output) minimal=50
2. Aturan kedua menyatakan rumus turunan dari fungsi $y=bx^n \dots\dots(2.25.)$ adalah $dy/dx=nbx^{n-1} \dots\dots (2.26.)$ Di mana n dan b adalah nilai sembarang.

Contoh:

1. turunan fungsi $y=x^2$ adalah $dy/dx=2x$
2. turunan fungsi $y=3x^4$ adalah $dy/dx=4.3x^{4-1}=12x^3$

Bila fungsi-fungsi ini adalah fungsi produksi maka turunan pertamanya akan merupakan MPP yang menunjukkan *rate of change* atau perubahan y sebagai akibat perubahan x atau besarnya slope fungsi produksi. Derivasi atau penurunan fungsi produksi dalam contoh di atas menunjukkan respon panen jagung secara kuantitatif terhadap perubahan pemakaian pupuk nitrogen (lihat persamaan 2.1.) $dy/dx=0+0,5 \cdot 5,93X^{-0,5}$ atau $dy/dx=2,965x^{-0,5}$.

Suatu bilangan pangkat negatif adalah sama dengan satu per bilangan pangkat tersebut dengan nilai eksponen positif, sebagai contoh: $x^{-2}=1/x^2 \dots\dots\dots(2.27.)$ Untuk contoh di atas dapat dituliskan $dy/dx=2,965/x^{0,5} \dots\dots\dots(2.28.)$ atau $dy/dx=2,965/\sqrt{x} \dots\dots\dots(2.29.)$

Bila jumlah x yang digunakan diketahui, maka $TPP= 50+5.93X^{-0,5}$ dan $MPP=2,965/x^{0,5}$ secara spesifik dapat dihubungkan dengan jumlah x yang digunakan. Selanjutnya dy/dx dapat menghasilkan perhitungan MPP yang tepat meskipun mungkin tidak sama persis dengan pendugaan yang dilakukan dengan cara menghitung $\Delta y/\Delta x$.

Tabel 2.4. menunjukkan bagaimana penghitungan MPP dengan menggunakan dua metode dari data panen jagung berdasarkan fungsi produksi pada persamaan 2.24. Pada metode pertama laju perubahan panen jagung untuk penambahan 40 pound pupuk dihitung dengan cara seperti yang telah dijelaskan pada tabel 2.3. Metode kedua dilakukan dengan memasukkan nilai aplikasi pupuk nitrogen ke dalam fungsi MPP yang diperoleh dari penurunan fungsi produksi. Nilai x yang dipilih adalah 20,60,100,140 dan 180 pound

nitrogen per acre. Hasil penghitungan dengan kedua metode di atas sebagaimana ditunjukkan pada tabel 2.24. tidak sama. Metode pertama menghasilkan nilai MPP pada titik tengah. Bila level aplikasi pupuk diketahui dengan pasti misalnya 20 pound per acre, penghitungan MPP dengan metode pertama dan MPP yang dihitung dengan memasukkan nilai titik tengah aktual pada fungsi MPP memberikan hasil yang berbeda. Hal ini disebabkan fungsi produksi *curvilinear* dan slope fungsi produksi yang menggunakan metode pertama hanya merupakan perhitungan kasar.

Pada metode kedua turunan fungsi produksi dapat memberikan nilai slope fungsi pada setiap level pemakaian pupuk nitrogen. Oleh karena itu nilai MPP yang dihitung dengan metode 2 lebih akurat. Diferensial kalkulus dasar dalam metode ini menjadi perangkat yang sangat bermanfaat bagi pengembangan ilmu ekonomi produksi pertanian.

Tabel 2.4. MPP Pupuk Nitrogen dalam Produksi Jagung dalam Dua Pendekatan Alternatif

Jumlah Nitrogen (lb/acre)	Produksi Jagung y atau TPP (bu/acre)	MPP Metode 1	MPP Metode 2
0	50,0		
40	87,5	0,9375	0,6630 N= 20 lb/acre
80	103,0	0,3875	0,3827 N= 60 lb/acre
120	115,0	0,3000	0,2965 N= 100 lb/acre
160	125,0	0,2500	0,2506 N= 140 lb/acre
200	133,9	0,2225	0,2212 N= 180 lb/acre

Tabel 2.5. Produksi Jagung, APP dan MPP untuk $y=0,75x+0,0042x^2-0,000023x^3$

X (Pupuk N)	Produksi Jagung y atau TPP (bu/acre)	APP _x $\frac{y}{x}$	MPP _x $\frac{dy}{dx}$
0	0	∞	0,75
20	16,496	0,8248	0,8904
40	35,248	0,8812	0,9756
60	55,152	0,9192	1,0056
80	75,104	0,9388	0,9604
100	94,000	0,9400	0,9000
120	110,736	0,9228	0,7644
140	124,208	0,8872	0,5736
160	133,312	0,8332	0,3276
180	136,944	0,7608	0,0264
200	134,000	0,6700	-0,3300
220	123,376	0,5608	-0,7416
240	103,968	0,4332	-1,2084

Asumsikan fungsi produksi yang menjelaskan respon produksi jagung terhadap pupuk nitrogen adalah $y=0,75x+0,004x^2-0,000023x^3$ (2.30.) Fungsi produk marginal adalah turunan pertama fungsi produksi : $dy/dx=0,75+0,0084x-0,000069x^2$(2.31.). Karena APP adalah y/x maka $APP=(0,75x+0,0042x^2-0,000023x^3)/x = 0,75+ 0,0042x-0,000023x^2$ (2.32.) Tabel 2.5. mengilustrasikan nilai APP dan MPP untuk persamaan 2.30. yang diperoleh dengan memasukkan jumlah pupuk N yang digunakan pada kolom pertama.

2.6. Fungsi Produksi Neoklasik

Fungsi produksi neoklasik telah cukup lama dikenal sebagai alat analisis yang digunakan untuk menjelaskan hubungan produksi pertanian. Gambar 2.3. mengilustrasikan fungsi produksi neoklasik dimaksud. Sejalan dengan peningkatan penggunaan input x_1 produktivitas input pada mulanya juga menunjukkan peningkatan. Fungsi produksi digambarkan naik dengan penambahan yang semakin meningkat. Selanjutnya kurva fungsi produksi mencapai suatu titik yang dinamakan titik balik atau *inflection point*. Pada titik ini fungsi produksi mengalami perubahan dari yang semula naik dengan laju penambahan output yang meningkat menjadi naik tetapi dengan laju penambahan output yang semakin menurun (*increasing to decreasing rate*). Dengan kata lain sebelum titik balik fungsi produksi konveks terhadap aksis horisontal dan setelah titik balik konkaf terhadap aksis horisontal. Titik balik menandai berakhirnya fase *increasing marginal returns* atau produk marginal yang semakin meningkat dan dimulainya fase produk marginal yang semakin menurun (*diminishing marginal returns*). Setelah itu fungsi produksi mencapai titik maksimum dan mulai turun. Pada titik maksimum kurva fungsi produk marginal sama dengan nol. Setelah titik maksimum dicapai penambahan penggunaan input variabel x akan menyebabkan terjadinya penurunan jumlah output total (TPP). Hal ini dalam realitas produksi pertanian sangat mungkin terjadi mengingat kemampuan tanah menyerap pupuk kimia ada batasnya. Penambahan pemakaian pupuk secara terus menerus hingga di luar daya serap tanah akan menyebabkan tanah mengeras sehingga sistem perakaran tanaman mengalami kesulitan menyerap hara dan pada akhirnya produksi total saat panen tiba akan menurun drastis.

2.7. MPP dan APP Fungsi Produksi Neoklasik

Fungsi MPP berubah sejalan dengan peningkatan penggunaan input pupuk x_1 . Pada awalnya produktivitas input x_1 meningkat, pada fase ini produk marginal juga mengalami peningkatan (fungsi MPP naik). Pada titik balik fungsi TPP neoklasik, produk marginal mencapai maksimum. Pada titik ini produktivitas setiap unit tambahan input x_1 paling besar. Setelah titik balik produk marginal input mulai menurun hingga mencapai nol pada saat output total pada fungsi TPP mencapai titik maksimum. Pemakaian input setelah titik maksimum menyebabkan produk marginal bernilai negatif.

Produk rata-rata (APP) juga berubah seiring penambahan penggunaan input produksi meskipun produk rata-rata tidak pernah negatif. Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya APP adalah rasio output input atau y/x_1 atau TPP/x_1 . Oleh karena itu APP pada titik tertentu pada fungsi produksi dapat digambarkan sebagai garis yang menyentuh titik tersebut dari titik pusat (origin). Slope garis tersebut adalah y/x_1 . Bila titik terpilih pada fungsi adalah x_1^0 maka APP pada titik tersebut adalah y/x_1^0 .

APP mencapai maksimum setelah titik balik sebelum titik maksimum. Pada gambar 2.3. diilustrasikan beberapa garis yang digambarkan dari origin. Slope masing-masing garis yang digambarkan dari origin pada suatu titik pada fungsi produksi menunjukkan APP pada titik tersebut. MPP juga merupakan slope fungsi produksi pada titik tertentu namun tidak digambarkan melalui origin. Ada satu garis yang selain melalui origin sekaligus merupakan slope fungsi produksi. Pada titik ini $MPP=APP$ atau $y/x=dy/dx$. Bila titik ini dinotasikan dengan x^0_1 maka sembarang pada titik yang lebih kecil dari x^0_1 slope fungsi produksi lebih besar dari slope garis yang digambarkan dari origin menyentuh titik tersebut. Dengan kata lain APP akan lebih kecil dari MPP sebelum titik x^0_1 .

Bila penggunaan input x_1 terus ditambah melewati batas x^0_1 , MPP akan bernilai negatif setelah titik maksimum terlampaui. APP pada kondisi tersebut tetap positif, fungsi APP merupakan kurva asimtotik. Hal ini mengimplikasikan tanpa input atau pada kondisi di mana penggunaan input sama dengan nol nilai produksi tidak didefinisikan ($y/0=\infty$).

Gambar 2.3. juga mengilustrasikan hubungan antara fungsi APP dan MPP. Fungsi MPP pada awalnya meningkat seiring penambahan pemakaian input produksi, hingga mencapai titik balik yang pada fungsi produksi ditunjukkan oleh titik A, Pada titik A fungsi MPP mencapai maksimum. Setelah titik ini MPP menurun, mencapai nol saat output maksimum di titik C dan kemudian menjadi negatif jika pemakaian input produksi pupuk terus ditambah. Fungsi APP masih meningkat setelah titik balik sampai titik B di mana $MPP=APP$. Setelah titik B, APP mulai menurun meski tidak bernilai negatif.

Hubungan antara APP dan MPP dapat dibuktikan melalui aturan diferensiasi fungsi komposit sebagai berikut:

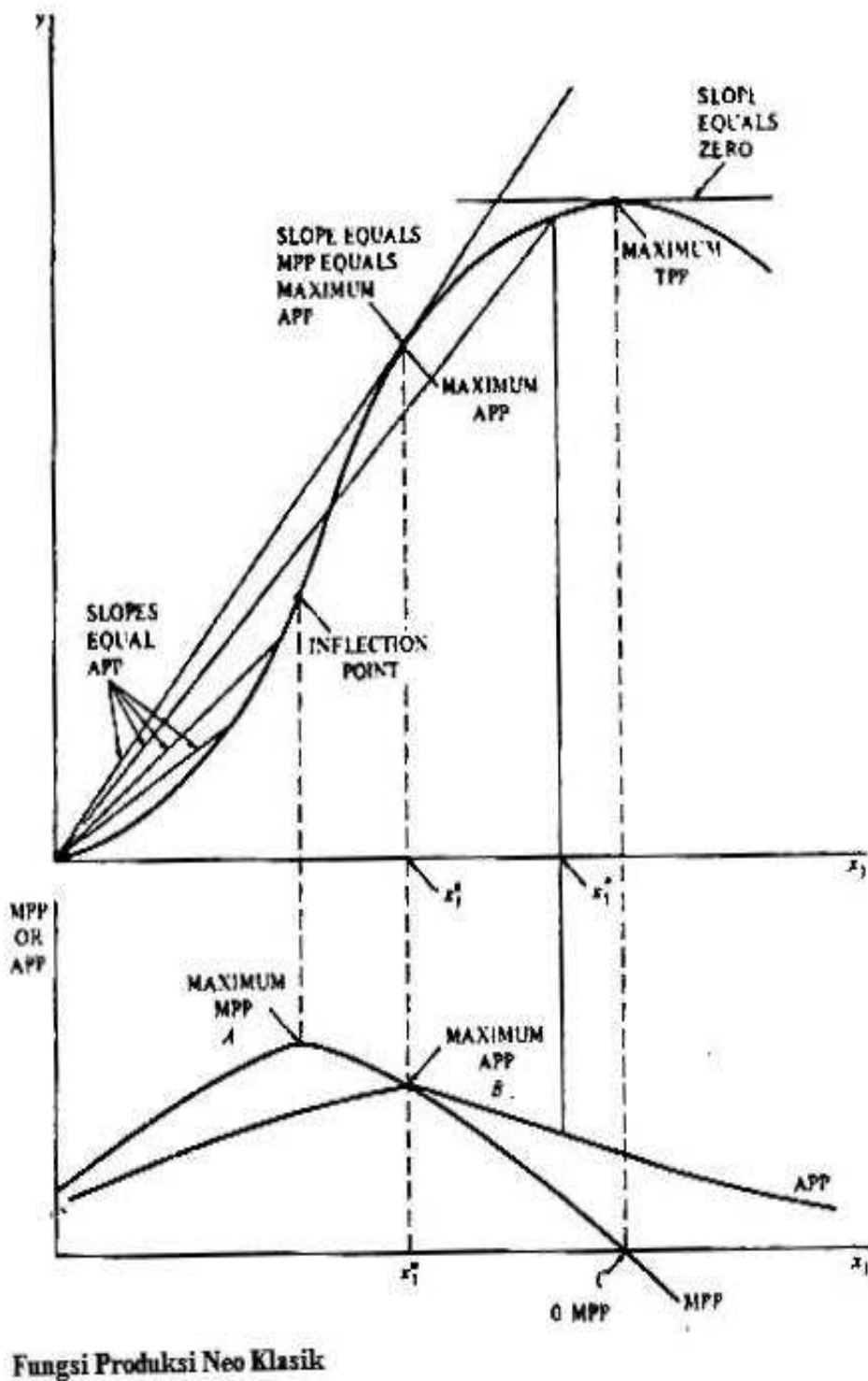
$$Y = (y/x)x \dots\dots\dots(2.33.)$$

Atau $TPP=APPx$ pada fungsi TPP

$$dy/dx = y/x + (d(y/x)dx)x \dots\dots\dots(2.34.)$$

atau $MPP=APP + slope APP.x$

Bila APP meningkat dan memiliki slope positif, MPP lebih besar dari APP. Bila APP menurun dan memiliki slope negatif, MPP lebih kecil dari APP. Dan jika APP memiliki slope sama dengan nol, MPP sama dengan APP.



Gambar 2.3. Tiga Tahapan Fungsi Produksi Neoklasik

2.8. Tanda, Slope dan Lengkung Kurva (*Curvature*)

Melalui menurunkan fungsi produksi berulang-ulang, dapat digambarkan secara akurat bentuk fungsi MPP. Untuk fungsi produksi $y=f(x)$(2.35.), turunan pertama atau fungsi MPP adalah $dy/dx=f'(x)=f_1=MPP$ (2.36.) Bila nilai x positif dimasukkan ke dalam fungsi $f'(x)$ tambahan satu unit input akan memberikan tambahan output. Karena MPP akan bernilai negatif setelah fungsi produksi mencapai maksimum, maka tanda positif dari $f'(x)$ menunjukkan bahwa fungsi produksi memiliki slope positif dan belum mencapai maksimal. Sebaliknya bila $f'(x)$ negatif maka berarti slope fungsi produksi negatif dan telah mencapai titik maksimal. Tanda pada turunan pertama fungsi produksi mengindikasikan apakah slope fungsi produksi positif atau negatif dan bila apakah MPP terletak di atas atau di bawah aksis horisontal. Apabila $MPP= nol$ maka $f'(x)$ juga sama dengan nol dan fungsi produksi mungkin konstan atau berada pada kondisi maksimum. Gambar 2.4. mengilustrasikan tujuh keadaan di mana turunan pertama fungsi produksi positif (a sampai g) dan tiga keadaan di mana turunan pertama bernilai negatif (h sampai j).

Turunan pertama fungsi produksi juga dapat sama dengan nol pada titik di mana fungsi TPP minimum. Tanda pada turunan kedua fungsi TPP digunakan untuk mengetahui apakah fungsi TPP maksimum atau minimum. Bila turunan pertama fungsi TPP sama dengan nol dan turunan keduanya negatif maka fungsi produksi berada pada kondisi maksimum. Namun bila turunan pertama fungsi TPP sama dengan nol dan turunan keduanya positif, fungsi produksi berada pada titik minimumnya. Bila kedua turunan baik pertama maupun kedua sama dengan nol, maka fungsi produksi berada pada titik balik (*inflection point*) atau dalam posisi berubah dari konveks ke konkaf terhadap aksis horisontal. Akan tetapi tidak pada semua titik balik turunan pertama fungsi produksi harus sama dengan nol. Selanjutnya bila turunan pertama fungsi produksi sama dengan nol namun turunan keduanya tidak dapat didefinisikan (tidak eksis) berarti fungsi produksi dalam kondisi konstan.

Turunan kedua fungsi produksi adalah turunan pertama fungsi MPP. Turunan kedua fungsi MPP merupakan slope fungsi MPP. Turunan kedua ini $[d^2y/dx^2]$ atau $f''(x)$ atau f_2 diperoleh dengan mendiferensiasikan fungsi produksi dua kali sbb:

$$d^2y/dx^2 = f''(x) = f_2 = dMPP/dx \dots\dots\dots(2.37.)$$

Bila persamaan (2.37.) positif untuk nilai x tertentu maka MPP pada titik tersebut meningkat (*increasing*). Tanda negatif mengindikasikan bahwa MPP *decreasing* pada titik tertentu. Bila $f''(x)=nol$ MPP berada pada titik maksimum. Pada gambar 2.4. turuna pertama fungsi MPP (turunan kedua fungsi TPP positif pada d,e dan f; negatif pada a, b,c,h,i dan j; sama dengan nol pada g)

Turunan kedua fungsi MPP merepresentasikan lengkung kurva MPP dan turunan ketiga fungsi TPP. Lengkung kurva ini diperoleh dengan menurunkan tiga kali fungsi produksi (TPP) sebagai berikut:

$$d^3y/dx^3 = f'''(x) = f_3 = d^2MPP/dx^2 \dots\dots\dots(2.38.)$$

Tanda $f'''(x)$ pada nilai x tertentu menunjukkan derajat atau laju perubahan MPP pada titik tertentu. Bila $f'''(x)$ positif MPP bertambah pada laju yang semakin meningkat (gambar 2.4. e) atau berkurang dengan laju yang semakin menurun (a atau j). Tanda negatif menunjukkan bahwa MPP meningkat dengan laju yang semakin menurun (d) atau menurun dengan laju yang semakin meningkat (b dan i). Jika $f'''(x)$ sama dengan nol, MPP memiliki slope konstan tanpa lengkung (f,g dan h).

Pendekatan yang sama dapat digunakan untuk APP. $APP=y/x$ dan jika y dan x positif, APP juga bernilai positif. Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya slope APP adalah :

$$d(y/x)/dx=f'(y/x)=dAPP/dx.....(2.39.)$$

Untuk nilai x tertentu, tanda positif menunjukkan slope positif dan sebaliknya. Lengkung kurva (*curvature*) APP dapat diformulasikan dalam persamaan berikut:

$$d^2(y/x)/dx^2=f''(y/x)=d^2APP/dx^2(2.40.)$$

Untuk nilai x tertentu tanda positif menunjukkan bahwa APP meningkat pada laju yang semakin bertambah atau menurun dengan laju yang semakin berkurang. Tanda negatif pada persamaan (2.40.) mengindikasikan bahwa APP meningkat pada laju yang semakin menurun atau menurun dalam laju yang semakin meningkat. Jika sama dengan nol maka berarti slope APP konstan. Turunan ketiga APP merepresentasikan derajat perubahan lengkung kurva APP.

Berikut ini contoh bagaimana penerapan aturan tersebut pada fungsi produksi spesifik yang menjelaskan respon produksi jagung terhadap pemakaian pupuk N.

Misal fungsi produksi $y=50+5,93x^{-0,5}$ (2.41.) di mana y adalah produksi jagung dan x adalah jumlah pupuk N yang digunakan.

$$MPP=f'(x)=2,965x^{-0,5}>0(2.42.)$$

Untuk persamaan (2.41.) MPP selalu positif pada level pemakaian input sebagaimana diindikasikan oleh tanda persamaan (2.42.) Bila tambahan pupuk Nitrogen diaplikasikan akan terjadi peningkatan jumlah produksi jagung. Untuk x positif dan MPP positif, fungsi produksi belum mencapai maksimum:

$$dMPP/dx=f''(x) = -1,48x^{-1,5}<0.....(2.43.)$$

Bila persamaan (2.43.) negatif, slope MPP menurun. Setiap tambahan pupuk Nitrogen yang diaplikasikan akan memproduksi tambahan panen jagung yang semakin berkurang. Dengan kata lain dalam fungsi produksi tersebut berlaku *the law of diminishing marginal returns*.

$$d^2MPP/dx^2=f'''(x)=2,22x^{-2,5}>0 (2.44.)$$

Jika persamaan (2.44.) terpenuhi, fungsi MPP menurun pada laju yang semakin menurun, semakin mendekati aksis horisontal namun tidak memotongnya. Hal ini masuk akal mengingat setiap tambahan pupuk N yang diberikan selalu menghasilkan respon positif terhadap penambahan produksi jagung.

$$APP =y/x=50/x+5,93x^{-0,5}=50x^{-1}+5,93x^{-0,5}>0.....(2.45.)$$

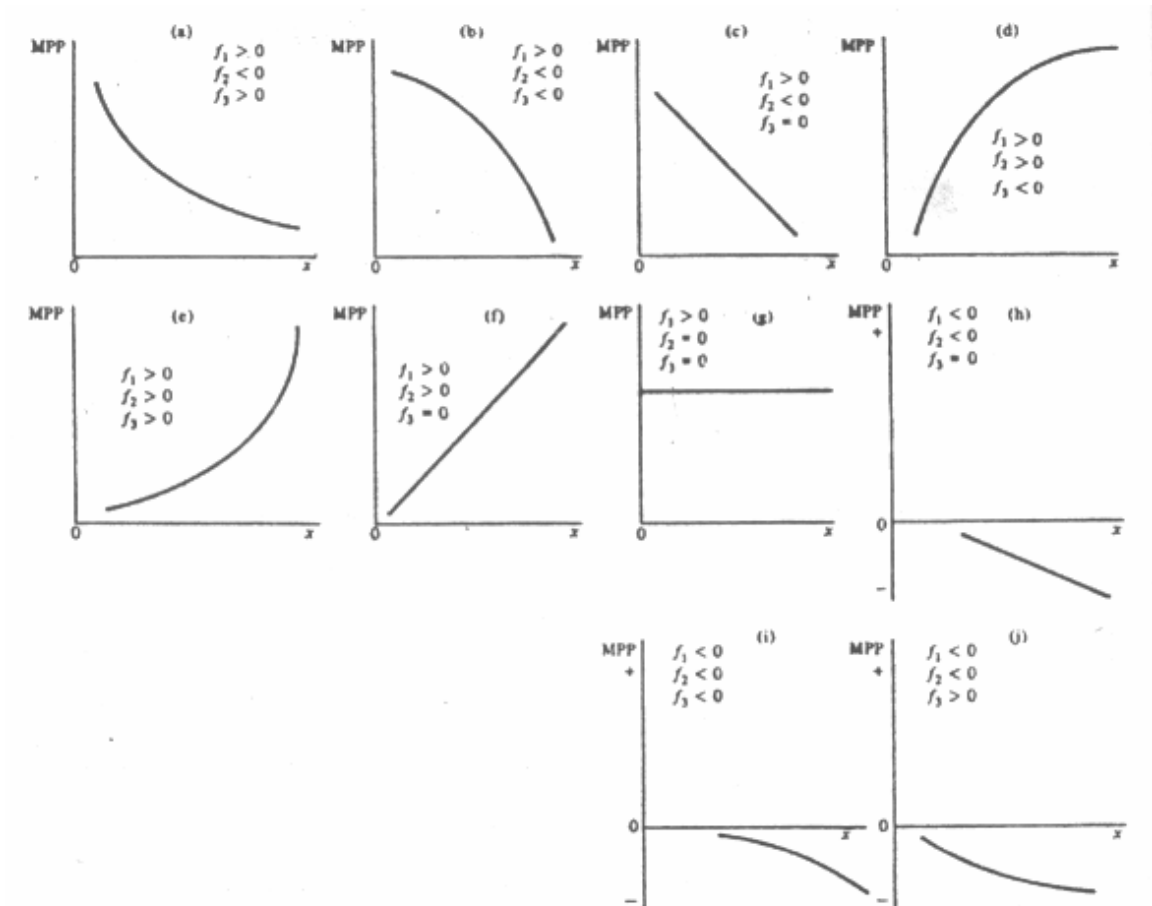
Bila x positif maka produksi jagung untuk setiap pound pupuk Nitrogen selalu positif.

$$dAPP/dx=d(y/x)/dx=-50x^{-2}-2,97x^{-1,5}<0.....(2.46.)$$

Jika x positif, slope APP akan menurun. Sejalan dengan peningkatan penggunaan pupuk N produk rata-rata per unit pupuk N akan berkurang.

$$d^2APP/dx^2=d^2(y/x)/dx^2=100x^{-3}+4,45x^{-2,5}>0.....(2.47.)$$

Jika x positif APP menurun dalam laju yang semakin berkurang. Dengan semakin meningkatnya pemakaian pupuk N maka produk rata-rata per unit pupuk N menurun dengan laju yang semakin berkurang.



Gambar 2.4. MPP Alternatif untuk Fungsi Produksi $y=f(x)$, $f_1=MPP, f_2=slope$ MPP dan $f_3=lengkung$ kurva MPP (*curvature*)

2.9. Elastisitas Produksi Input Tunggal

Kata elastisitas digunakan oleh pakar ekonomi untuk menjelaskan hubungan antara dua variabel. Elastisitas direpresentasikan oleh suatu besaran yang menunjukkan rasio dari dua persentase. Elastisitas dinyatakan dalam bilangan tanpa satuan.

Elastisitas produksi didefinisikan sebagai persentase perubahan output dibagi dengan persentase perubahan input, sesuai dengan perubahan penggunaan input. Misalkan x' melambangkan level penggunaan input awal untuk memproduksi y' unit output. Penggunaan x meningkat menjadi x'' yang digunakan untuk memproduksi y'' unit output. Elastisitas produksi (E_p) didefinisikan dengan rumus sebagai berikut:

$$E_p = [(y'' - y') / y'] / [(x'' - x') / x'] \dots \dots \dots (2.48.)$$

Di mana y', y'' dan x'' telah diketahui sebelumnya sedangkan x dan y merepresentasikan nilai tengah antara level penggunaan input awal dan penggunaan input setelah mengalami penambahan dan output.

$$x = (x' + x'') / 2 \text{ dan } y = (y' + y'') / 2 \dots \dots \dots (2.49.)$$

Oleh karena elastisitas produksi merupakan rasio dua persentase, maka nilai elastisitas tidak tergantung pada satuan yang spesifik, namun cukup menyesuaikan dengan satuan yang digunakan dalam pengukuran input dan output. Sebagai contoh jika y adalah panen jagung dalam satuan bu/acre dan x adalah penggunaan pupuk N dalam pound per acre; atau jika panen jagung dihitung dalam liter per hektar dan pupuk N dihitung dalam satuan kg/ha, sepanjang jumlah nitrogen dan hasil panen yang diperoleh sama maka perhitungan nilai elastisitas produksi juga tidak mengalami perubahan.

Dengan cara lain elastisitas produksi dirumuskan sebagai berikut:

$$E_p = (\Delta y / y) / (\Delta x / x) \dots\dots\dots(2.50.)$$

Di mana $\Delta y = y' - y''$ dan $\Delta x = x' - x''$

Elastisitas produksi merupakan salah satu cara untuk mengukur bagaimana respon fungsi produksi berubah terhadap penggunaan input. Nilai elastisitas yang besar, misalnya lebih besar dari 1 mengimplikasikan bahwa output merespon kuat peningkatan penggunaan input produksi. Nilai elastisitas produksi antara 0 dan 1 menunjukkan bahwa output akan meningkat sejalan penambahan penggunaan input akan tetapi semakin kecil nilai elastisitas produksi semakin kecil pula repon output terhadap penambahan input. Nilai elastisitas produksi negatif mengimplikasikan bahwa jika level penggunaan input meningkat maka output justru akan mengalami penurunan.

Elastisitas produksi juga dapat didefinisikan dalam konsep relasional antara MPP dan APP sebagai berikut:

$$E_p = (\Delta y / y) / (\Delta x / x) \dots\dots\dots(2.51.)$$

Persamaan ini juga dapat dituliskan:

$$E_p = (\Delta y / \Delta x) / (x / y) \dots\dots\dots(2.52.)$$

Perhatikan bahwa :

$$\Delta y / \Delta x = MPP \dots\dots\dots(2.53.)$$

Dan

$$x / y = 1 / APP \dots\dots\dots(2.54.)$$

Dengan demikian maka:

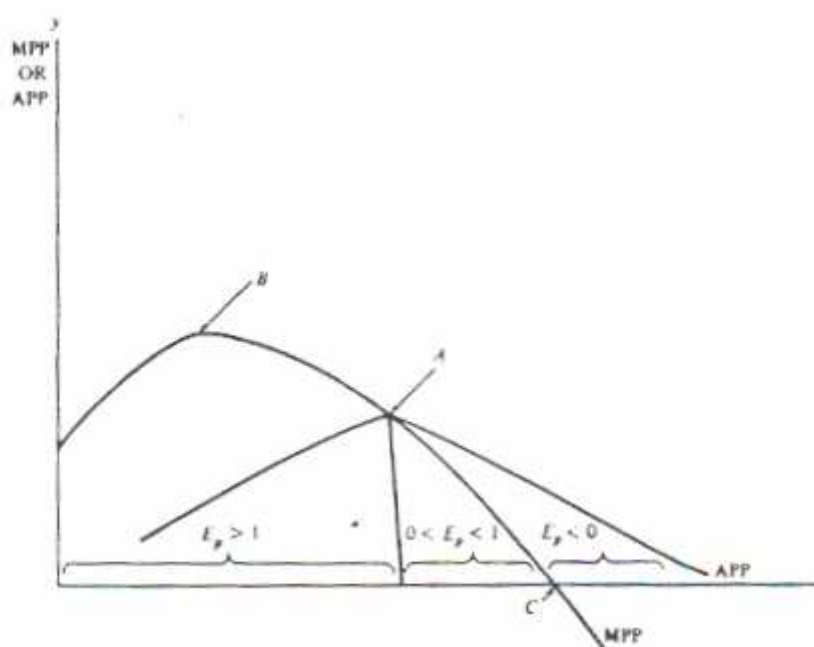
$$E_p = MPP / APP \dots\dots\dots(2.55.)$$

Elastisitas produksi yang besar mengindikasikan bahwa MPP relatif lebih besar dibandingkan APP. Dengan kata lain output yang dihasilkan dari tambahan unit input pupuk relatif lebih besar daripada rerata output yang diperoleh dari total penggunaan input. Sebaliknya bila elastisitas produksi sangat kecil, output dari tambahan penggunaan input relatif kecil dibandingkan dengan rerata produksi total input yang digunakan.

Elastisitas Produksi untuk Fungsi Produksi Neoklasik

Fungsi produksi neoklasik memiliki urutan nilai elastisitas produksi yang unik sebagai dampak hubungan antara MPP dan APP. Hubungan tersebut diilustrasikan pada gambar di bawah ini.

1. Elastisitas produksi lebih besar dari 1 sampai titik di mana $MPP=APP$ yaitu pada titik A
2. Elastisitas produksi mencapai nilai tertinggi pada saat rasio MPP terhadap APP paling besar. Untuk fungsi produksi neoklasik, biasanya ini terjadi pada saat MPP mencapai maksimal yaitu pada titik balik B.
3. Elastisitas produksi kurang dari 1 dicapai setelah titik A di mana $MPP=APP$
4. Elastisitas produksi sama dengan 0 saat MPP sama dengan 0. Harus tetap diingat bahwa APP selalu positif (titik C)
5. Elastisitas produksi negatif saat MPP bernilai negatif dan tentu saja pada kondisi tersebut output mengalami penurunan di bawah titik C. Bila fungsi produksi menurun (*decreasing*) MPP dan elastisitas produksi bernilai negatif.
6. Karakteristik unik fungsi produksi neoklasik dapat diamati apda saat level penggunaan input ditingkatkan. Hubungan antara MPP dan APP secara kontinyu mengalami perubahan. Oleh sebab itu rasio MPP terhadap APP juga berubah. Karena $E_p = MPP/APP$ maka elastisitas produksi juga harus berubah seiring peningkatan penggunaan input. Inilah karakteristik fungsi produksi neoklasik yang spesifik dalam arti tidak berlaku untuk semua jenis fungsi produksi.



Gambar 2.5. MPP, APP, dan Elastisitas Produksi

2.11. Pengayaan Konsep Elastisitas Produksi]

Persamaan $\Delta y / \Delta x$ hanyalah aproksimasi atau pendugaan nilai MPP dari fungsi produksi pada level pemakaian input yang spesifik. MPP aktual pada titik tertentu akan lebih baik bila direpresentasikan dengan memasukkan nilai x ke dalam fungsi produk marginal dy/dx .

Elastisitas produksi pada level x yang spesifik dapat diperoleh dengan menetapkan nilai dy/dx pada level pemakaian input x yang bersangkutan sebagai berikut:

$$E_p = (dy/dx)y/x \dots\dots\dots(2.56.)$$

Misalkan dalam sebuah fungsi produksi neoklasik $TPP = y = bx \dots\dots\dots(2.57.)$, di mana b adalah angka positif. Nilai $dy/dx=b$, dan karena $y=bx$ maka $y/x=bx/x=b$. Jadi $MPP(dy/dx)=APP(y/x)=b \Leftrightarrow MPP/APP=b/b=1$.

Jadi elastisitas fungsi produksi di atas adalah 1. Hal ini berarti persentase peningkatan penggunaan input x tertentu akan menghasilkan peningkatan output y dalam persentase yang sama. Oleh karena itu semua fungsi produksi yang *return* output terhadap input-nya konstan akan memiliki elastisitas produksi = 1.

Selanjutnya misal fungsi produksi $y = a\sqrt{x} \dots\dots\dots(2.58.)$

Atau $y = ax^{0.5} \dots\dots\dots(2.59.)$

Maka $dy/dx = 0,5ax^{-0.5} \dots\dots\dots(2.60.)$

Dan $y/x = ax^{-0.5} \dots\dots\dots(2.61.)$

Dengan demikian $(dy/dx)/(y/x) = 0,5$ atau dengan kata lain elastisitas produksinya =0,5. Hal ini berarti untuk setiap level penggunaan input MPP akan sama dengan setengah APP. Secara umum elastisitas produksi adalah b untuk fungsi produksi dengan formulasi:

$$y=ax^b \dots\dots\dots(2.62.)$$

$$dy/dx = bax^{b-1} \dots\dots\dots(2.63.)$$

$$y/x = ax^b / x = ax^b x^{-1} = ax^{b-1} \dots\dots\dots(2.64.)$$

Cara lain untuk menuliskan persamaan y/x adalah x^{-1} sehingga $y/x=yx^{-1}$. Untuk $y=ax^b$ maka $x^b x^{-1} = x^{b-1}$. Jadi rasio MPP terhadap APP atau elastisitas produksi suatu fungsi produksi selalu sama dengan konstanta b. Konsep ini berbeda dengan hubungan antara MPP dan APP dalam fungsi produksi neoklasik di mana rasio keduanya tidak konstan tetapi secara berangsur-angsur berubah sesuai level penggunaan input x.

2.12. Kesimpulan dan Latihan Soal

Bab ini memaparkan secara detail hubungan fisik atau teknik model input-output. Sebuah konsep fungsi produksi dapat dikembangkan dengan menggunakan pendekatan verbal-tabular, grafik dan matematik. Ilustrasi fungsi produksi yang digunakan adalah fungsi produksi pertanian dengan pola yang mengikuti hukum kenaikan hasil yang semakin berkurang (*the law of diminishing marginal returns*). Pada bab ini juga diperkenalkan konsep produk marginal dan produk rata-rata. Aturan kalkulus diterapkan untuk menetapkan apakah suatu fungsi maksimum atau minimum. Pengembangan konsep fungsi

produksi dilengkapi dengan konsep elastisitas produksi yang mendeskripsikan hubungan antara produk total, produk marginal dan produk rata-rata.

Untuk menguji kedalaman konsep-konsep yang telah dijelaskan latihan berikut akan membantu.

1. Di bawah ini adalah data fungsi produksi. Isilah sel yang kosong pada tabel untuk melengkapinya.

x (input)	y (output)	MPP	APP
0	0	
10	50
25	75
40	80
50	85

2. Di antara fungsi produksi berikut manakah yang memenuhi *the law of diminishing returns*?
 - a. $y = x^{0,2}$
 - b. $y = 3x$
 - c. $y = x^3$
 - d. $y = 6x - 0,1x^2$
3. Jelaskan hubungan fungsi APP dan MPP pada fungsi-fungsi produksi dalam soal nomor 2!
4. Untuk fungsi produksi $y = 2x^b$ turunkan fungsi MPP dan APP dan gambarkan pada secarik kertas grafik kurva TPP,APP dan MPP bila nilai b sebagai berikut:
 - a. 5
 - b. 3
 - c. 2
 - d. 1
 - e. 1,5
 - f. 0,7
 - g. 0,3
 - h. 0
 - i. -0,5
 - j. -1

Jangan lupa menyebutkan tanda, slope dan lengkung kurva MPP dan APP. Berapa nilai elastisitas produksi untuk setiap soal?

5. Gambarkan fungsi produksi : $y = 0,4x + 0,009x^2 - 0,003x^3$

untuk nilai x antara 0-20. Turunkan dan gambarkan hubungan MPP dan APP. Bagaimana persamaan aljabar elastisitas produksi fungsi di atas? Apakah elastisitas produksi bersifat konstan atau variabel? Jelaskan!

6. Misalkan koefisien atau parameter suatu fungsi produksi polinomial tidak diketahui. Persamaan fungsi produksinya adalah $y = ax + bx^2 + cx^3$ di mana y adalah output jagung (bu/acre); x adalah aplikasi pupuk N (pound/acre); a, b, c adalah koefisien atau parameter yang belum diketahui besarnya. Fungsi produksi di atas harus mampu memproduksi jagung maksimal 150 bu/acre dengan aplikasi pupuk N sebanyak 200 pound/acre (MPP=0). APP maksimum tercapai pada level aplikasi pupuk N 125 pound/acre. Carilah nilai parameter a, b dan c fungsi produksi yang sesuai dengan batasan sebagaimana telah disebutkan. *Petunjuk:* mula-mula cari persamaan untuk APP dan MPP dan persamaan yang merepresentasikan APP maksimum dan MPP nol. Kemudian masukan level aplikasi pupuk N pada tiga persamaan yang merepresentasikan TPP, APP maksimum dan MPP nol. Anda akan memperoleh tiga persamaan untuk solusi nilai a, b dan c .

