# EKONOMI PRODUKSI

Kode PTE-4103

## PERTEMUAN KEDELAPAN: MAKSIMISASI TERKENDALA (Lanjutan)

8

*Rini Dwiastuti*
*2007*

## Sub-pokok Bahasan (Lanjutan)

7. Constrained Revenue Max.
8. Second Order Condition
9. Interpretation of the Lagrangian Multiplier
10. Constrained Output Max.
11. Cost-Minimization Subject to a Revenue Constraint
12. Application: the design of contractual arrangement between land-lords and tenant

**7. *Constrained Revenue Max.***

*To globally maximize profits, the next best alternative is to find a point of least-cost combination*

Objective function to be maximized revenue:

$$R = py$$

$$R = p\, f\,(x_1, x_2)$$

Terkendala pd dana yg tersedia u/ belanja input $x_1$ & $x_2$

$$C^o = v_1x_1 + v_2x_2$$

$C^o$ = sejml uang yg dimiliki petani yg tersedia u/ membeli input $x_1$ & $x_2$

Pendekatan yg digunakan:

*the classical optimization technique* → Lagrange's function

Yakni u/ memecahkan problem max. & minim. dr fungsi terkendala

Variabel baru: Lagrange's multiplier dg notasi: $\lambda$ atau $\mu$

Pers umum fungsi LagrangeL adalah:

*L* = (fs tujuan untuk max atau min) + $\lambda$(kendala pd fungsi tujuan)

Aplikasi:

Fs Lagrange yg mewakili penerimaan produksi jagung petani dengan memasukan kendala ketersediaan input $x_1$ & $x_2$ u/ memproduksi jagung adalah:

$$L = py + \lambda(C^o - v_1x_1 - v_2x_2)$$

atau

$$L = p\, f(x_1, x_2) + \lambda(C^o - v_1x_1 - v_2x_2)$$

Kondisi perlu (necessary condition) u/ fs tujuan max atau min → FOC, yakni kondisi yg diperlukan bahwa turunan pertama *L* yg berkaitan dengan $x_1$, $x_2$ & $\lambda$ = nol

$$\partial L/\partial x_1 = p\, f_1 - \lambda v_1x_1 = 0 \qquad .....(8.18)$$

$$\partial L/\partial x_2 = p\, f_2 - \lambda v_2x_2 = 0 \qquad .....(8.19)$$

$$\partial L/\partial \lambda = C^o - v1x1 - v2x2 = 0 \qquad .....(8.20)$$

$f_1 = \partial y/\partial x_1 = MPPx_1$

$f_2 = \partial y/\partial x_2 = MPPx_2$

$pf_1 = VMP_1$; $pf_2 = VMP_2$

$v_1$ & $v_2$ = *harga input* $x_1$ & $x_2$ *atau* $MFC_1$ & $MFC_2$

Note:

Pers (8.18) & (8.19) mirip FOC fs profit, namun ada tambahan pengganda Lagrange

Pers (8.20) mengindikasikan bhw ketika fungsi tujuan u/ maksimisasi, seluruh nilai uang yg tersedia u/ belanja input akan dikeluarkan. Petani tdk memp pilihan tdk membelanjakan sebagian anggarannya.

Dari pers (8.18) & (8.19) didptkan:

$pf_1/v_1 = \lambda$ dan $p f_2/v_2 = \lambda$

Bila pers (8.18) & (8.19) dibagikan:

$$pf_1/pf_2 = \lambda v_1/\lambda v_2$$

atau

$$pMPP_1/pMPP_2 = \lambda v_1/\lambda v_2$$

atau

$$f_1/f_2 = v_1/v_2$$

atau

$$MPP_1/MPP_2 = v_1/v_2$$

atau $dx_1/dx_2 = v_1/v_2$

Besaran (magnitude) pengganda Lagrange:

$$pf_1/v_1 = pf_2/v_2 = \lambda$$

*$pf_1$ = VMP* input $x_1$
→ nilai output dr tambahan satu unit input $x_1$
*$pf_2$ = VMP* input $x_2$
→ nilai output dr tambahan satu unit input x2

*v1 & v2 = harga input x1 & x2 atau MFC1 & MFC2*

⇩

Pengganda Lagrange menjelaskan rasio antara *the marginal value of the input* dlm bentuk kontribusinya thdp penerimaan usahatani (VMP) secara relatif thdp biaya marjinal (MFC)

- Dlm contoh tsb pengganda Lagrange dpt diartikan sbg nilai implisit pengeluaran nilai uang (dollar) terakhir thdp input.
- Menjelaskan nilai tambahan pengeluaran dolar pd input u/ usahatani jika input yg dialokasikan sesuai dg pd kondisi *the expansion path*.
- Pengganda Lagrange juga digagas sbg *shadow price*. Biaya dr pengeluaran mata uang (dollar) terakhir untuk input adalah $1.00

Nilai dollar mungkin atau tidak mungkin sama dengan harga input?

- Jika $VMPx_1 = v_1$, penerimaan usahatani dr pengeluaran dollar terakhir secara tepat adalah satu dollar. Jika hal tsb juga benar u/ $x_2$, mk metode Lagrange menghasilkan pemecahan yg sama seperti pemecahan profit max. (lihat sblmnya)

Kaidah keputusan yg dikembangkan dg bantuan metode Lagrange menetapkan bahwa petani dpt mengalokasikan dollar yg tersedia u/ belanja dua input sedemikian rupa shg pengeluaran dolar terakhir pd masing-masing input menghasilkan sejumlah ($\lambda$) untuk kedua input.

$$VMPx_1/MFCx_1 = VMPx_2/MFCx_2 = \lambda$$

Cara lain dr penetapan pengganda Lagrange → per-ubahan penerimaan dikaitkan dg satu unit tambahan dollar yg ditambahkan pd *the budget outlay C*.

$\lambda$ adalah *dR/dC*

*The Lagrangian* adlh fs penerimaan u/ nilai yg memenuhi kendala biaya → $dR/dC = dL/dC = \lambda$

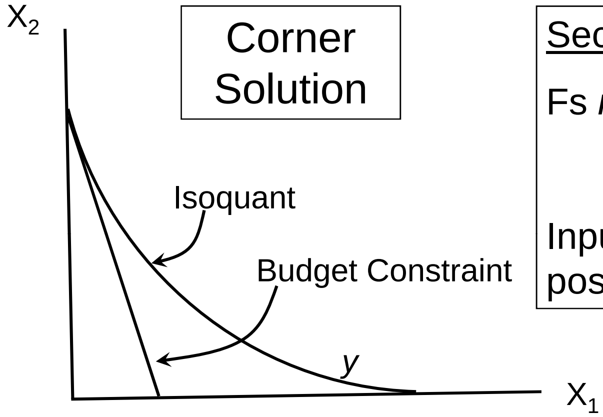
Berapakah nilai $\lambda$ dr Metode Lagrange? $\lambda$ =1 atau $\lambda$ = 0 atau nilai yg lain?

→ Hanya memerlukan rasio antara VMP dg MFC u/ keseluruhan input

→ equivalen dg mendapatkan titik² pd sepanjang the expansion path yg terkait dg budget outlay yg mewakili kendala

Jika satu input relatif cukup lebih murah drpd input lain, berarti memungkinkan u/ mendapatkan satu titik kombinasi biaya terkecil yg hanya menggunakan input yg lebih murah & tanpa memerlukan input yg lebi mahal → isoquant memotong sumbu pd input yg lebih murah → memungkinkan corner solution

## Corner Solution




Secara matematik:

Fs *multiplicative*:

$$y = ax_1^{0.5}x_2^{0.5}$$

Input yg digunakan positif kuat

**Konsisten**

Fs *Additive*:

$$y = ax_1 + bx_1^2 + cx_2 + dx_2^2$$

→ Tdk dpt menghasilkan kuantitas input positif

**Tdk konsisten**

## 8. *Second Order Condition*

*FOC → define the point of tangency between the isoquant & the budget constraint*

*→ the farmer on the expansion path*

*SOC* → menjamin titik max drpd min atau saddle point

*FOC*

$$p\,f_1 - \lambda v_1 x_1 = 0$$

$$p\,f_2 - \lambda v_2 x_2 = 0$$

$$C^o - v1x1 - v2x2 = 0$$

*SOC*

$\partial(pf_1 - \lambda v_1 x_1)/\partial x_1 = pf_{11}$

$\partial(pf_1 - \lambda v_1 x_1)/\partial x_2 = pf_{12} = pf_{21}$ *(Young's Theorem)*

$\partial(pf_1 - \lambda v_1 x_1)/\partial \lambda = - v_1$

$\partial(pf_2 - \lambda v2x2)/\partial x1 = pf_{21}$

$\partial(pf_2 - \lambda v_2 x_2)/\partial x_2 = pf_{22}$

$\partial(pf_2 - \lambda v_2 x_2)/ \partial \lambda = - v_2$

$\partial(C^o - v_1 x_1 - v_2 x_2)/\partial x_1 = - v_1$

$\partial(C^o - v_1 x_1 - v_2 x_2)/\partial x_2 = - v_2$

$\partial(Co - v_1 x_1 - v_2 x_2)\partial \lambda = 0$

Dlm bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} & - v_1 \\ pf_{21} & pf_{22} & - v_2 \\ - v_1 & - v_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai Determinan matriks

$$Pf_{11}\, pf_{22} * 0 + pf_{12}\ (- v_1)\ (- v_2) + pf_{12}\ (- v_2)\ (- v_1)$$

$$- [(- v_1)\ pf_{22} (- v_1) + (-v_2)\ (- v2)\ pf_{11} + pf_{12} pf_{12} * 0]$$

$$= 2pf_{12} v_1 v_2 - pf_{22} v^2{}_1 - pf_{11} v^2{}_2$$

$$= p[2f_{12} v_1 v_2 - f_{22} v^2{}_1 - f_{11} v^2{}_2]$$

# 9. *Interpretation of the Lagrangian Multiplier*

- Interpretasi pengganda Lagrange hampir sama dg interpretasi nilai K pd bab 7 → lihat slide ke-19 pd TM ke-8
- Andaikan petani beroperasi pd posisi dimana:

$$VMPx_1/v_1 = VMPx_2/v_2 = \lambda = -2.8 \quad .\ .\ .\ .\ (8.38)$$

Selama $\lambda$ adlh negatif, pers (8.38) merupakan di luar titik output maksimum u/ kedua input:

Hal yg mungkin atas dasar logika ekonomi pd bab 7 → lihat box pd slide ke 19 pd TM ke-8.

Namun pd metode Lagrange tdk dijumpai suatu solusi optimal dengan nilai $\lambda$ negatif pd expansion path

Sprt dikesankan pd bab 7, jika $\lambda$ tepat sama dg nol, petani akan mengoperasikan persis pd titik global output maksimum yg berkenaan dg dua input

Kecuali kedua input bebas, seorang petani tertarik dlm memaksimumkan profit akan tdk pernah beroperasi di sini, walaupun pd kenyataannya bhw solusi ini adalah dibolehkan dg matematik dr metode Lagrange

Jika $\lambda$ persis sama dg Satu, akan bertepatan dg titik global profit maksimum dimana the pseudo scale line berpotongan dg expansion path → lihat Gb 7.3 & 7.4

Problem optimasi Lagrange terkendala memunculkan solusi tsb. Petani akan memerlukan suatu apriori u/ memiliki ketepatan jml nilai mata uang (dollar) yg dialokasikan u/ membeli input $x_1$ & $x_2$ yg terkait dg the budget outlay line yg memotong ttk tsb. → lihat slide ke-11 pd TM ke-7

- Jika petani yg tertarik pd memaksimumkan profit, dia hanya memaksimumkan fungsi profit (selisih antara penerimaan & biaya). Solusi menetapkan kedua total outlay (pembayaran) yg akan menjadikan kedua input $x_1$ & $x_2$ mengindikasikan berapa banyak pengeluaran yg akan dialokasikan antara kedua input.
- Problem memaksimumkan penerimaan terkendala mendptkan total pembayaran u/ pengeluaran pd kedua input adalah tetap dan tertentu (given), dan menentukan berapa besar pembayaran yg dialokasikan antara dua input.

Nilai $0 < \lambda < 1$ → adalah titik² pd expansion path antara titik dimana the pseudo scale lines berpotongan (profit adalah maksimum) dan titik dimana the ridge line berpotongan (output maksimum). Kecuali mungkin pd tingkat input penggunaan yg paling rendah, $\lambda > 1$ pd titik the expansion path didlm titik global profit maximization.

Pengganda Lagrange mewakili rasio VMP/MFC u/ bundle input yg ditentukan oleh proporsi sepanjang expansion pathm → berarti pd beberapa titik di expansion path memerlukan kurang $x_1$ & $x_2$ drpd titik profit max, yakni kontribusi masing-masing input hdp selisih penerimaan & biaya.

## *10. Constrained Output Max.*

Kombinasibiaya terkecil dr penggunaan input dpt disusun sbg problem :

Fs tujuan memaksimumkan output

Kendala : the same budget constraint

Note:

Solusinya hampir mirip dg The constrained revenue maximization problem, tp interpretasi pengganda Lagrange-nya berbeda

Fs tujuan memaksimumkan output, y:

$$Y = f\,(x_1, x_2)$$

Kendala anggaran yg tersedia u/ belanja input $x_1$ & $x_2$

$$C^o = v_1x_1 + v_2x_2$$

Pers Lagrange: $L = f(x_1,x_2) + \Theta\,(C^o - v_1x_1 - v_2x_2)$

Dimana $\Theta$ adah pengganda Lagrange baru.

*FOC:*

$f_1 - \theta v_1 = 0$ . . . . . (8.42)

$f_2 - \theta v_2 = 0$ . . . . . (8.43)

$C^o - v_1x_1 - v_2x_2 = 0$ . . . . . (8.44)

Pers (8.42) dibagi pers (8.43):

$$f_1/f_2 = MRSx_1x_2 = v_1/v_2$$

Dptdihasilkan:

$$f_1/v_1 = f_2/v_2 = \theta$$

$$MPPx_1/v_1 = MPPx_2/v_2 = \theta$$

Dlm kasus ini pengganda Lagrange mewakili kuantitas fisik dr output, bukan penerimaan yg muncul dr pengeluaran dollar terakhir pd masing$^2$ input.

$\theta = 1$ mengindkasikan bhw pengeluaran satu dollar terakhir pd masing-masing input akan menghasilkan satu unit fisik output

## 11. Cost-Minimization Subject to a Revenue Constraint

U/ mendptkan satu titik pd expansion path yg mewakili kombinasi input biaya terkecil juga bisa dibangun sbg problem:

Fs tujuan meminimumkan biaya
Kendala : penerimaan

Fs tujuan meminimumkan biaya:

$$C^o = v_1x_1 + v_2x_2$$

Kendala penerimaan (revenue):

$R^o = py$ atau $R^o = p\, f(x_1, x_2)$

Pers Lagrange:

$$L = v_1x_1 + v_2x_2 + \mu\, [\mathrm{Ro} - \mathrm{p}f(x_1,x_2)]$$

*FOC:*

$v_1 - \mu\, \mathrm{p}f_1 = 0$ atau $v_1 = \mu\, \mathrm{p}f_1$

$v_2 - \mu\, \mathrm{p}f_2 = 0$ $V_2 = \mu\, \mathrm{p}f_2$

$R^o - p\, f(x_1, x_2) = 0$

atau $v_1/\mathrm{p}f_1 = v_2/\mathrm{p}f_2 = \mu$

atau $v_1/\mathrm{p}\ \mathrm{MPP}x_1 = v_2/\mathrm{p}\ MPPx_2 = \mu$

Note:

$\mu$ dr problem *cost-minimization* terkendala = $1/\lambda$ problem *revenue-maximization* terkendala;

juga $\lambda$ dr problem *cost-minimization* terkendala = $1/\mu$ dr problem *revenue-maximization* terkendala

Dlm bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} -\mu p f_{11} & -\mu p f_{12} & -pf_1 \\ -\mu p f_{21} & -\mu p f_{22} & -pf_2 \\ -pf_1 & -pf_2 & 0 \end{pmatrix}$$

*SOC* memerlukan :

$$\mu p^3 f_1 f_1 f_{22} + \mu p^3 f_2 f_2 f_{11} - 2\mu p^3 f_2 f_1 f_{12} < 0$$

Substitusikan $f_1 = v1/\mu p$ dan $f_2 = v_2/\mu p$ , menghasilkan:

$$(p/\mu)\ (f_{22}\, v^2{}_1 + f_{11}\, v^2{}_2 - 2f_{12} v_1 v_2 < 0$$

atau

$$(p/\mu)\ (2f_{12} v_1 v_2 - f_{22}\, v^2{}_1 + f_{11}\, v^2{}_2) > 0$$

12. Application: the design of contractual arrangement between land-lords and tenant